

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**Л.С. Андрієвська**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**  
**ТА ВИКОНАННЯ РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНИХ**  
**І ПРАКТИЧНИХ ЗАВДАНЬ З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**  
**„ЗГИН У БАЛКАХ І РАМАХ”**

(для студентів 2 курсу усіх форм навчання спеціальності  
6.092100- „Промислове і цивільне будівництво”)

**ХАРКІВ – ХНАМГ – 2008**

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних і практичних завдань з опору матеріалів „Згин у балках і рамах” (для студентів 2 курсу усіх форм навчання спеціальності 6.092100 „Промислове і цивільне будівництво ”).

Укладач: Л.С. Андрієвська

Рецензент: Г.А. Молодченко

Рекомендовано кафедрою будівельної механіки, протокол № 1 від 29.08.2008р.

Ці методичні вказівки призначені для самостійної роботи студентів при підготовці до практичних занять і виконанні розрахунково-графічних завдань. Вони містять теоретичні положення та завдання і приклад його виконання.

Опір матеріалів є одним з основних курсів у підготовці інженерно-технічних кадрів. Базуючись на висновках теоретичної механіки й використовуючи відповідний математичний апарат, опір матеріалів розглядає питання міцності, жорсткості та стійкості машин і споруд.

При вивченні курсу опору матеріалів найбільш ефективним методом є самостійне виконання студентами контрольних завдань. У зв'язку з цим для студентів ХНАМГ усіх спеціальностей програмою курсу опору матеріалів передбачено виконання кількох контрольних завдань.

У цих вказівках зібрано типові задачі з розділу "Згин у балках і рамах" і рекомендації до їх виконання.

## ОДИНИЦІ ВИМІРУ

У роботі прийнята міжнародна система одиниць СІ. Користуючись довідниками механічних характеристик з технічною системою одиниць, слід застосовувати такі залежності:

$$1 \text{ кгс} = 10 \text{ Н};$$

$$1 \text{ тс} = 10 \text{ кН}; \quad 1 \text{ кН} = 10^3 \text{ Н};$$

$$1 \text{ тс/м} = 10 \text{ кН/м};$$

$$1 \text{ кгс/см}^2 = 0,1 \text{ МПа}; \quad 3 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 0,1 \text{ кН/см}^2 = 10^3 \text{ кН/м}^2;$$

$$1 \text{ тс м} = 10 \text{ кН-м}.$$

## ЗАВДАННЯ № 1

Розрахунок на міцність балок, що працюють на згин.

Задано: схеми навантаження п'яти балок і величини навантажень, допустиме напруження  $[\sigma]$  для матеріалу балок.

Мета завдання: засвоєння методики побудови епюр поперечних сил і згинаючих моментів, вибір поперечного перерізу балки з умови міцності по нормальних напруженнях.

### 1. Зміст завдання № 1

1.1. Користуючись табл. 1 і 2, відповідно до заданого варіанта накреслити схему кожної балки з усіма діючими навантаженнями. Балки зобразити відрізками в 10 см.

1.2. Для кожної балки визначити величини опорних реакцій, побудувати епюри поперечних сил  $Q$ , та згинаючих моментів  $M_z$  і перевірити їх побудову.

Таблиця 1 - Вихідні дані до розрахункових балок

№ п/п	$F_1$ кН	$F_2$ кН	$F_3$ кН	$F_4$ кН	$M_1$ кН м	$M_2$ кН м	$M_3$ кН м	$M_4$ кН м	$q_1$ кН/м	$q_2$ кН/м	$a$ м	$b$ м	$c$ м
1	20	10	30	30	40	10	20	30	30	10	1	1	1
2	10	30	20	30	30	20	30	20	50	30	2	2	1
3	20	20	10	10	20	20	40	30	40	10	1	1	2
4	30	10	20	20	10	30	20	40	20	40	2	2	1
5	30	20	30	10	50	40	20	20	20	50	1	1	1
6	10	30	10	20	30	40	50	10	10	20	1	1	2
7	30	40	30	50	40	20	10	50	20	10	2	2	1
8	40	50	20	30	20	10	30	40	30	20	1	1	1
9	50	30	20	40	10	50	30	40	10	40	1	1	2
10	40	10	10	50	50	10	30	30	20	30	1	2	1
11	50	20	30	40	10	30	10	40	30	10	1	1	1
12	40	20	20	50	30	20	50	30	30	30	2	2	1
13	10	40	10	20	20	50	40	10	50	20	1	2	2
14	20	50	30	10	10	20	50	40	10	30	1	1	2
15	40	30	20	30	50	10	10	20	10	40	2	2	1

1.3. Для балки, вказаної викладачем, визначити умови міцності по нормальних напруженнях, осьовий момент опору  $W_z$ .

1.4. Підібрати поперечні перерізи балки:  
двотавровий;

прямокутний при  $\frac{h}{b} = 2$ ;

прямокутний при  $\frac{h}{b} = 0,5$ ;

круглий;

кільцевий при  $\alpha = \frac{d}{D} = 0,7$ .

Визначити їх площі. Одержані результати навести у вигляді таблиці.

1.5. Для небезпечних перерізів балки побудувати епюри нормальних і дотичних напружень з обчисленням величин напружень у характерних точках перерізу. Вказані епюри будувати тільки для двотаврового поперечного перерізу.

## 2. Виконання завдання

Умову міцності по нормальних напруженнях записують для найбільш небезпечної точки небезпечного перерізу:

Таблиця 2 – Варіанти схем розрахункових балок

1				
2				
3				
4				
5				
6				

Продовження табл. 2

7					
8					
9					
10					
11					
12					

Продовження табл. 2

13				
14				
15				
16				
17				
18				

Закінчення табл. 2

19					
20					
21					
22					
23					
24					



$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} \leq [\sigma],$$

або для перерізів, що симетричні відносно нейтральної осі:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma].$$

Небезпечним вважається переріз, в якому діє максимальний згинаючий момент  $M_{\max}$ , а його розміщення визначається аналізом побудованої епюри згинаючих моментів " $M_z$ ".

Небезпечною вважається точка перерізу, що найбільш віддалена від нейтральної осі  $z$ , тобто точка з координатою  $y_{\max}$ .

Величина допустимого напруження визначається рівнянням

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n_m}$$

або задається.

З умови міцності визначається необхідна величина осьового моменту опору:

$$W_z \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]}.$$

2.1. Підбір перерізу балки проводиться так:

- для двотаврового перерізу номер профілю визначають порівнянням обчисленої величини осьового моменту опору з даними сортаменту для двотаврових профілів (ГОСТ 8239-89);

- для прямокутного перерізу осьовий момент опору визначається:

$$W_z = \frac{bh^2}{6},$$

де  $h, b$  - розміри перерізу. Площа поперечного перерізу  $A = bh$ ;

- для круглого перерізу:

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \quad d = \sqrt[3]{\frac{32 W_z}{\pi}}, \quad A = \frac{\pi d^2}{4};$$

- для кільцевого перерізу:

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4), \quad \alpha = \frac{d}{D},$$

$d$  - внутрішній діаметр,  $D$  - зовнішній діаметр,  $A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)$ .

2.2. Епюри нормальних і дотичних напружень будують тільки для двотаврового перерізу. Епюру нормальних напружень будують для перері-

зу, в якому діє  $M_{max}$ , а епюру дотичних напружень - для перерізу, в якому діє максимальна поперечна сила  $Q_{max}$ . На побудованій епюрі " $\sigma$ " вказують зони стиску і розтягу, а на епюрі " $\tau$ " - напрямок вектора дотичних напружень.

При побудові епюри " $\tau$ " необхідно обчислити за формулою Журавського

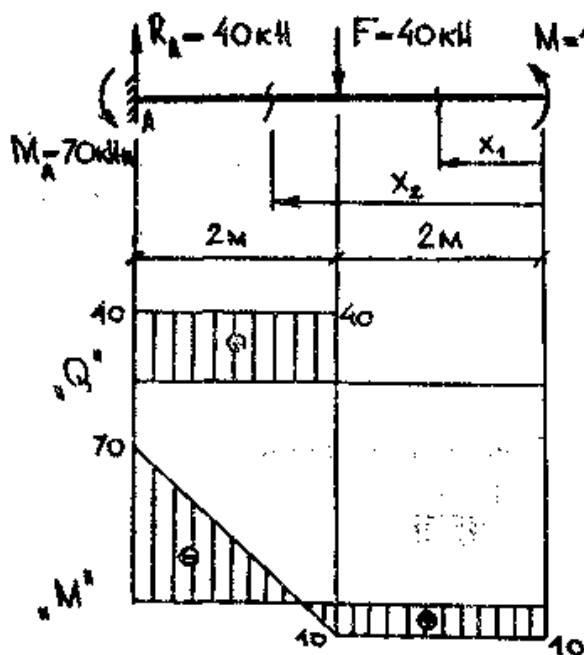
$$\tau = \frac{Q_y S_z^*}{b I_z}$$

дотичні напруження у характерних точках:

- найбільш віддалених від нейтральної осі ( $z$ );
- розташованих у місці переходу полиці у стінку;
- розташованих на нейтральній осі.

Епюри нормальних і дотичних напружень необхідно будувати в однаковому масштабі.

## ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ №1



### Задача № 1

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$$

$$Q_{x_1} = 0.$$

$$M_{x_1} = M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$2 \text{ м} \leq x_2 \leq 4 \text{ м}$$

$$Q_{x_2} = F = 40 \text{ кН}.$$

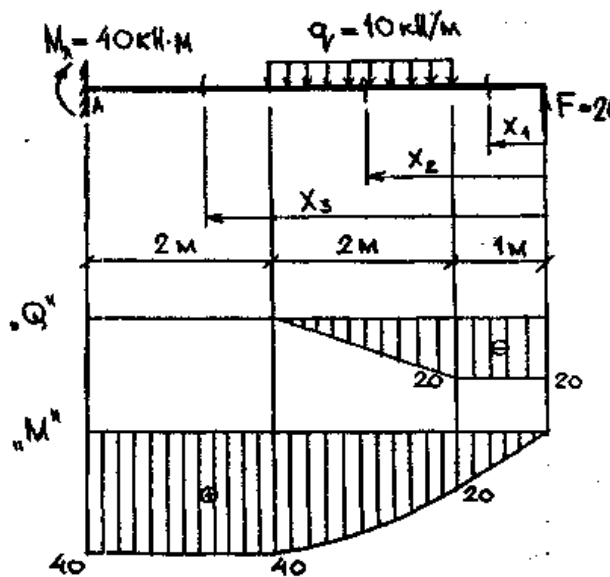
$$M_{x_2} = M - F(x_2 - 2) \Rightarrow$$

$$M_{x_2}|_{x_2=2} = M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x_2}|_{x_2=4} = 10 - 40(4 - 2) = -70 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

### Задача № 2

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$



$$Q_{x1} = -F = -20 \text{ kH.}$$

$$M_{x1} = F x_1 \Rightarrow$$

$$M_{x1}|_{x1=0} = 0;$$

$$M_{x1}|_{x1=1} = 20 \cdot 1 = 20 \text{ kH·m.}$$

$$1 \text{ m} \leq x_2 \leq 3 \text{ m}$$

$$Q_{x2} = -F + q(x_2 - 1) \Rightarrow$$

$$Q_{x2}|_{x2=1} = -20 \text{ kH};$$

$$Q_{x2}|_{x2=3} = -20 + 10(3 - 1) = 0.$$

$$M_{x2} = F x_2 - \frac{q(x_2 - 1)^2}{2} \Rightarrow$$

$$M_{x2}|_{x2=1} = 20 \cdot 1 \text{ kH·m}; \quad M_{x2}|_{x2=3} = 20 \cdot 3 - \frac{10 \cdot (3 - 1)^2}{2} = 40 \text{ kH·m},$$

$$3 \text{ m} \leq x_3 \leq 5 \text{ m}$$

$$Q_{x3} = -F + q \cdot 2 = -20 + 10 \cdot 2 = 0.$$

$$M_{x3} = -F \cdot x_3 - q \cdot 2 \cdot (x_3 - 2) \Rightarrow M_{x3}|_{x3=3} = 40 \text{ kH·m}; \quad M_{x3}|_{x3=5} = 40 \text{ kH·m}.$$

### Задача № 3

1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum M_A = 0,$$

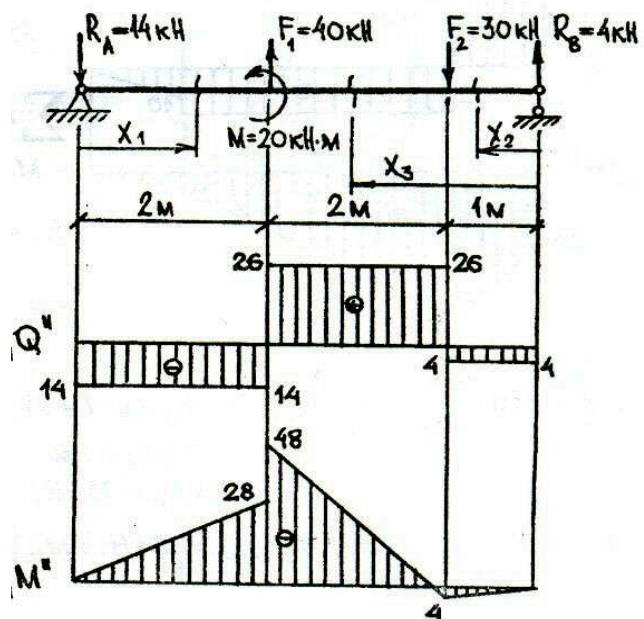
$$M + F_1 \cdot 2 - F_2 \cdot 4 + R_B \cdot 5 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{-M - F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 4}{5} = \frac{-20 - 40 \cdot 2 + 30 \cdot 4}{5} = 4 \text{ t};$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$R_A \cdot 5 + M - F_1 \cdot 3 + F_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{-M + F_1 \cdot 3 - F_2 \cdot 1}{5} = \frac{-20 + 40 \cdot 3 - 30 \cdot 1}{5} = 14 \text{ t}.$$



Перевірка:

$$\sum y = 0, -R_A + F_1 - F_2 + R_B = -14 + 40 - 30 + 4 = 0.$$

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м}$$

$$Q_{x_1} = -R_A = -14 \text{ кН} ;$$

$$M_{x_1} = -R_A \cdot x_1 \Rightarrow M_{x_1} |_{x_1=0} = 0, M_{x_1} |_{x_1=2} = -14 \cdot 2 = -28 \text{ кНм} .$$

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_{x_1} = -R_B = -4 \text{ кН} .$$

$$M_{x_2} = R_B \cdot x_2 \Rightarrow M_{x_2} |_{x_2=0} = 0, M_{x_2} |_{x_2=1} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кНм}.$$

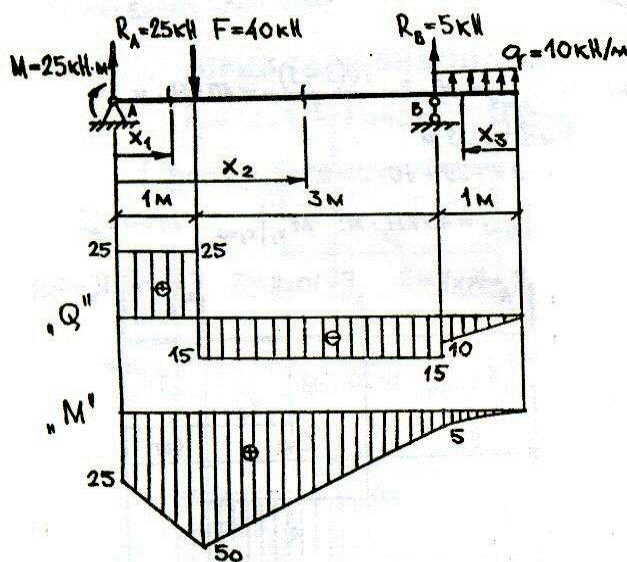
$$1 \text{ м} \leq x_3 \leq 3 \text{ м}$$

$$Q_{x_3} = -R_B + F_2 = -4 + 30 = 26 \text{ кН} ;$$

$$M_{x_3} = R_B \cdot x_3 - F_2 \cdot (x_3 - 1) \Rightarrow$$

$$M_{x_3} |_{x_3=1} = 4 \cdot 1 = 4 \text{ кНм}, M_{x_3} |_{x_3=3} = 4 \cdot 3 - 30(3 - 1) = -48 \text{ кНм}.$$

#### Задача №4



$$\sum M_A = 0,$$

$$-M - F \cdot 1 + R_B \cdot 4 + q \cdot 1 \cdot 4,5 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{M + F \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot 4,5}{4} =$$

$$= \frac{25 + 40 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot 4,5}{4} = 5 \text{ кН} ;$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M - R_A \cdot 4 + F \cdot 3 + q \cdot 1 \cdot 0,5 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{-M + F \cdot 3 + q \cdot 1 \cdot 0,5}{4} =$$

$$= \frac{-25 + 40 \cdot 3 + 10 \cdot 1 \cdot 0,5}{4} = 25 \text{ кН} .$$

Перевірка:

$$\sum y = 0, R_A - F + R_B + q \cdot 1 = 25 - 40 + 5 + 10 \cdot 1 = 0.$$

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_{x_1} = R_A = 25 \text{ кН} ;$$

$$M_{x_1} = M + R_A \cdot x_1 \Rightarrow M_{x_1} |_{x_1=0} = 25 \text{ кНм} , M_{x_1} |_{x_1=1} = 25 + 25 \cdot 1 = 50 \text{ кНм} .$$

$$1\text{ м} \leq x_2 \leq 4\text{ м}$$

$$Q_{x_2} = R_A - F = 25 - 40 = -15\text{ кН}$$

$$M_{x_2} = M + R_A \cdot x_2 - F \cdot (x_2 - 1) \Rightarrow$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=1} = 25 + 25 \cdot 1 = 50\text{ кН}\cdot\text{м} ; M_{x_2} \big|_{x_2=4} = 25 + 25 \cdot 4 - 40(4 - 1) = 5\text{ кН}\cdot\text{м} .$$

$$0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$$

$$Q_{x_3} = -q \cdot x_3 \Rightarrow Q_{x_3} \big|_{x_3=0} = 0, Q_{x_3} \big|_{x_3=1} = -10 \cdot 1 = -10\text{ кН} ;$$

$$M_{x_3} = \frac{qx_3^2}{2} \Rightarrow M_{x_3} \big|_{x_3=0} = 0, M_{x_3} \big|_{x_3=1} = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5\text{ кН}\cdot\text{м} .$$

### Задача № 5

1. Визначення опорних реакцій:

$$\sum M_A = 0,$$

$$F \cdot 1 - q \cdot 2 \cdot 1 - M + R_B \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$R_B = \frac{-F \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 1 + M}{3} =$$

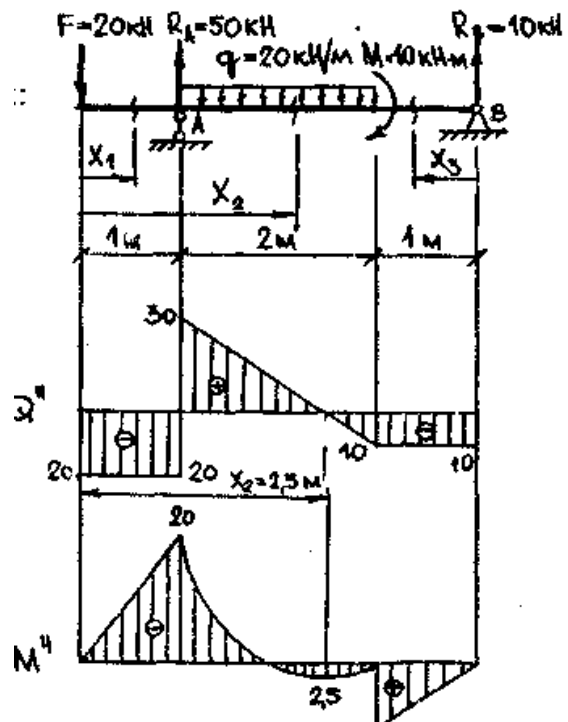
$$= \frac{-20 \cdot 1 + 20 \cdot 2 \cdot 1 + 10}{3} = 10\text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0,$$

$$F \cdot 4 - R_A \cdot 3 + q \cdot 2 \cdot 2 - M = 0 \Rightarrow$$

$$R_A = \frac{F \cdot 4 + q \cdot 2 \cdot 2 - M}{3} =$$

$$= \frac{20 \cdot 4 + 20 \cdot 2 \cdot 2 - 10}{3} = 50\text{ кН}.$$



Перевірка:

$$\sum y = 0,$$

$$-F + R_A - q \cdot 2 + R_B = -20 + 50 - 20 \cdot 2 + 10 = 0.$$

2. Побудова епюр поперечних сил  $Q$  і згинаючих моментів  $M$ :

$$0 \leq x_1 \leq 1\text{ м}$$

$$Q_{x_1} = -F = -20\text{ кН} ;$$

$$M_{x_1} = -F \cdot x_1 \Rightarrow M_{x_1} \big|_{x_1=0} = 0, M_{x_1} \big|_{x_1=1} = -20 \cdot 1 = -20\text{ кН}\cdot\text{м} .$$

$$1\text{ м} \leq x_2 \leq 3\text{ м}$$

$$Q_{x_2} = -F + R_A - q(x_2 - 1) \Rightarrow$$

$$Q_{x_2} \big|_{x_2=1} = -20 + 50 = 30\text{ кН}, Q_{x_2} \big|_{x_2=3} = -20 + 50 - 20(3 - 1) = -10\text{ кН};$$

$$M_{x_2} = -F \cdot x_2 + R_A \cdot (x_2 - 1) - \frac{q(x_2 - 1)^2}{2} \Rightarrow$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=1} = -20 \cdot 1 = -20\text{ кНм}; M_{x_2} \big|_{x_2=3} = -20 \cdot 3 + 50(3 - 1) - \frac{20(3 - 1)^2}{2} = 0.$$

$$\frac{dM_{x_2}}{dx_2} = Q_{x_2} = -F + R_A - q(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{-F + R_A + q}{q} = \frac{-20 + 50 + 20}{20} = 2,5\text{ м}.$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=2,5} = 20 \cdot 2,5 + 50(2,5 - 1) - \frac{20(2,5 - 1)^2}{2} = 2,5\text{ кНм}.$$

$$0 \leq x_3 \leq 1\text{ м}$$

$$Q_{x_3} = -R_B = -10\text{ кН};$$

$$M_{x_3} = R_B x_3 \Rightarrow M_{x_3} \big|_{x_3=0} = 0, M_{x_3} \big|_{x_3=1} = 10 \cdot 1 = 10\text{ кНм}.$$

### 3. Розрахунок балки на міцність

Умова міцності по нормальних напруженнях:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_{н.в.}} \leq [\sigma],$$

осьовий момент опору:

$$W_{н.в.} = \frac{M_{\max}}{[\sigma]},$$

де  $M_{\max} = 20\text{ кНм}$  (з епюри “М”),  $[\sigma] = 200\text{ МПа}$ .

Підбір поперечних перерізів балки:

**двотавровий**

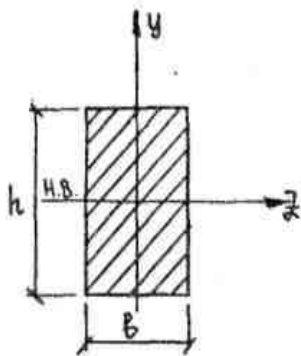
$$W_{н.в.} \geq \frac{20 \cdot 10^2}{20} = 100\text{ см}^3, \quad W_{н.в.}^{\text{табл.}} = 109\text{ см}^3.$$

Прийнято I № 16,

$$A = 20,2\text{ см}^2, \quad S_{н.в.}^{\max} = 62,3\text{ см}^3, \quad I_{н.в.} = 873\text{ см}^4,$$

$$h = 160\text{ мм}, \quad b = 81\text{ мм}, \quad t = 7,8\text{ мм}, \quad d = 5\text{ мм}.$$

прямокутний



$$\frac{h}{b} = \frac{2}{1},$$

$$b = \frac{h}{2}, W_{н.в.} = \frac{bh^2}{6} = \frac{\frac{h}{2} \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{12} = 100 \text{ см}^3.$$

$$h = \sqrt[3]{12 \cdot 100} = 10,6 \text{ см}, b = \frac{h}{2} = 5,3 \text{ см},$$

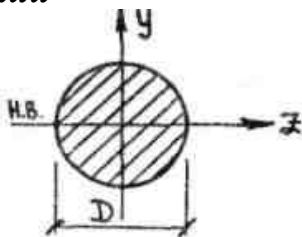
$$A = 56 \text{ см}^2.$$

$$\frac{h}{b} = \frac{1}{2},$$

$$b = 2h, W_{н.в.} = \frac{2h \cdot h^2}{6} = \frac{h^3}{3} = 100 \text{ см}^3,$$

$$h = \sqrt[3]{3 \cdot 100} = 6,7 \text{ см}, b = 2h = 13,4 \text{ см}, A = 80 \text{ см}^2.$$

круглий



$$W_{н.в.} = \frac{\pi D^3}{32} = 100 \text{ см}^3,$$

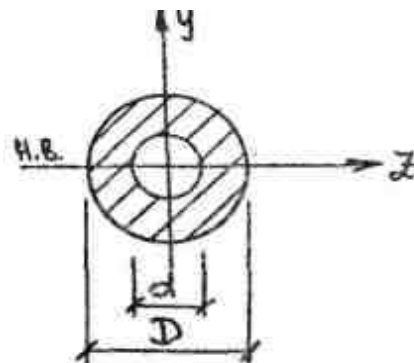
$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 100}{3,14}} = 10 \text{ см}, A = \frac{\pi D^2}{4} = 78 \text{ см}^2.$$

кільцевий

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,8, W_{і.а.} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = 100 \text{ см}^3.$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 100}{3,14(1 - 0,8^4)}} = 12 \text{ см}, d = 0,8D = 9,6 \text{ см}$$

$$A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = 40 \text{ см}^2.$$

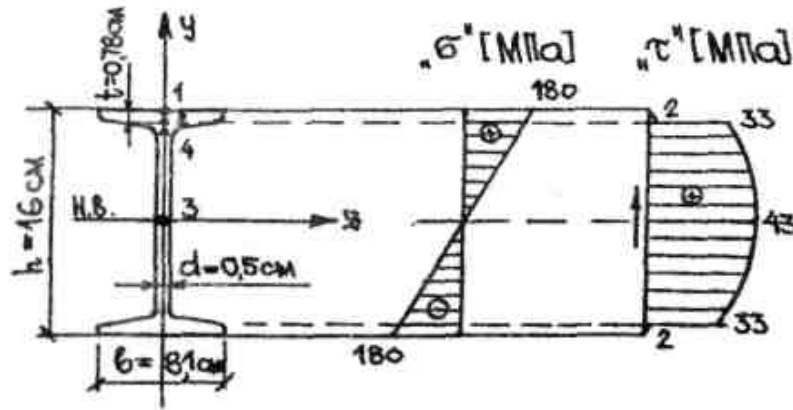


Переріз Показник					
$A_I, \text{ см}^2$	20,2	56	80	78	40
$A_I/A_I$	1	2,8	4,5	3,9	2

Напруження у двотаврі:

$$\sigma = \frac{M_{\max} y}{I_{i.a.}}. \quad \sigma_1 = \frac{20 \cdot 10^2 \cdot 8}{873} = 180 \text{ МПа} \quad \sigma_3 = 0.$$

$$\tau = \frac{Q_{\max} S_{H.B.}^*}{b I_{H.B.}}, \quad Q_{\max} = 30 \text{ кН (з епюри "Q")}$$



Точка 1:  $S_{i.a.}^{(1)} = 0, \quad \tau_1 = 0.$

Точка 3:  $S_{H.B.}^{(3)} = S_{H.B.}^{(max)} = 62,3 \text{ см}^3, \quad \tau_3 = \frac{30 \cdot 62,3}{0,5 \cdot 873} = 43 \text{ МПа}.$

Точка 2:  $S_{i.a.}^{(2)} = b \cdot t \left( \frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 8,1 \cdot 0,78 \left( 8 - \frac{0,78}{2} \right) = 48,08 \text{ см}^3,$   
 $\tau_2 = \frac{30 \cdot 48,08}{8,1 \cdot 873} = 2 \text{ МПа}.$

Точка 4:  $S_{i.a.}^{(4)} = S_{i.a.}^{(2)} = 48,08 \text{ см}^3, \quad \tau_4 = \frac{30 \cdot 48,08}{0,5 \cdot 873} = 33 \text{ МПа}.$

## ЗАВДАННЯ № 2

Побудова епюр згинаючих моментів, поперечних та поздовжніх сил у рамах.

Задано: Схема навантаження рами і величини навантажень.

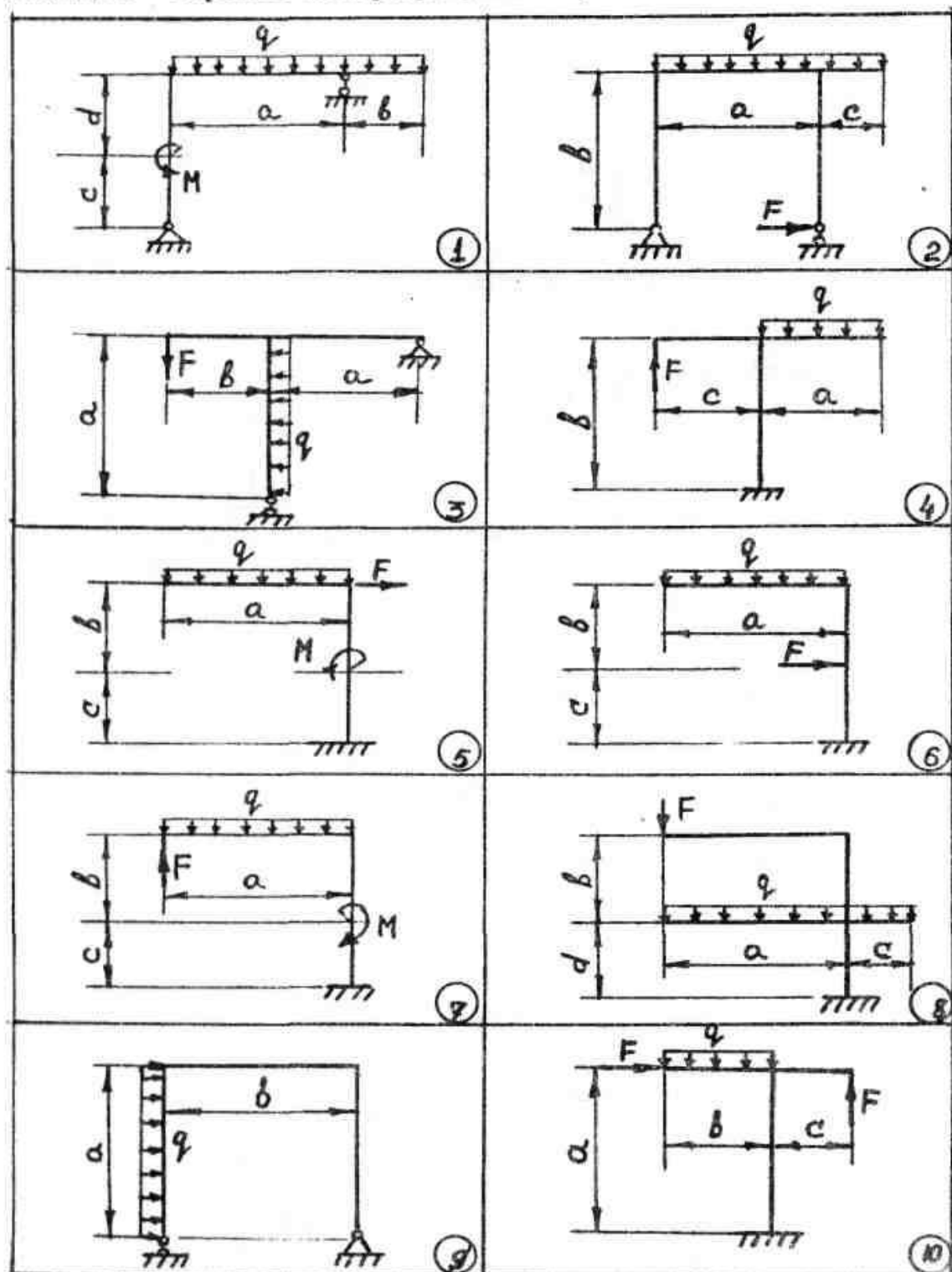
Мета завдання: засвоєння методики побудови епюр поперечних і поздовжніх сил та згинаючих моментів.

### 1. Зміст завдання № 2

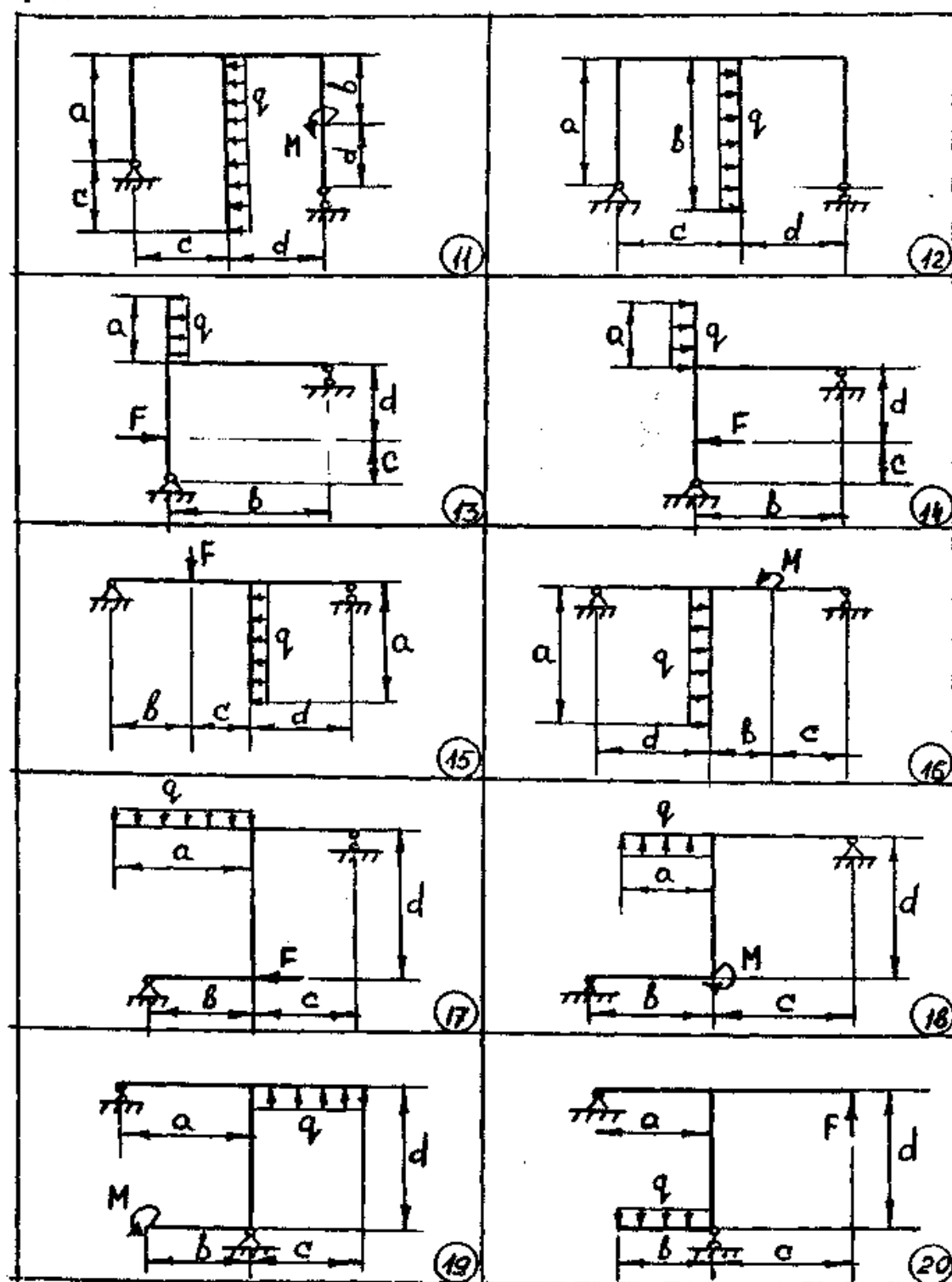
1.1. Користуючись табл.3 і 4, відповідно до заданого варіанту накреслити схему рами з усіма діючими навантаженнями.



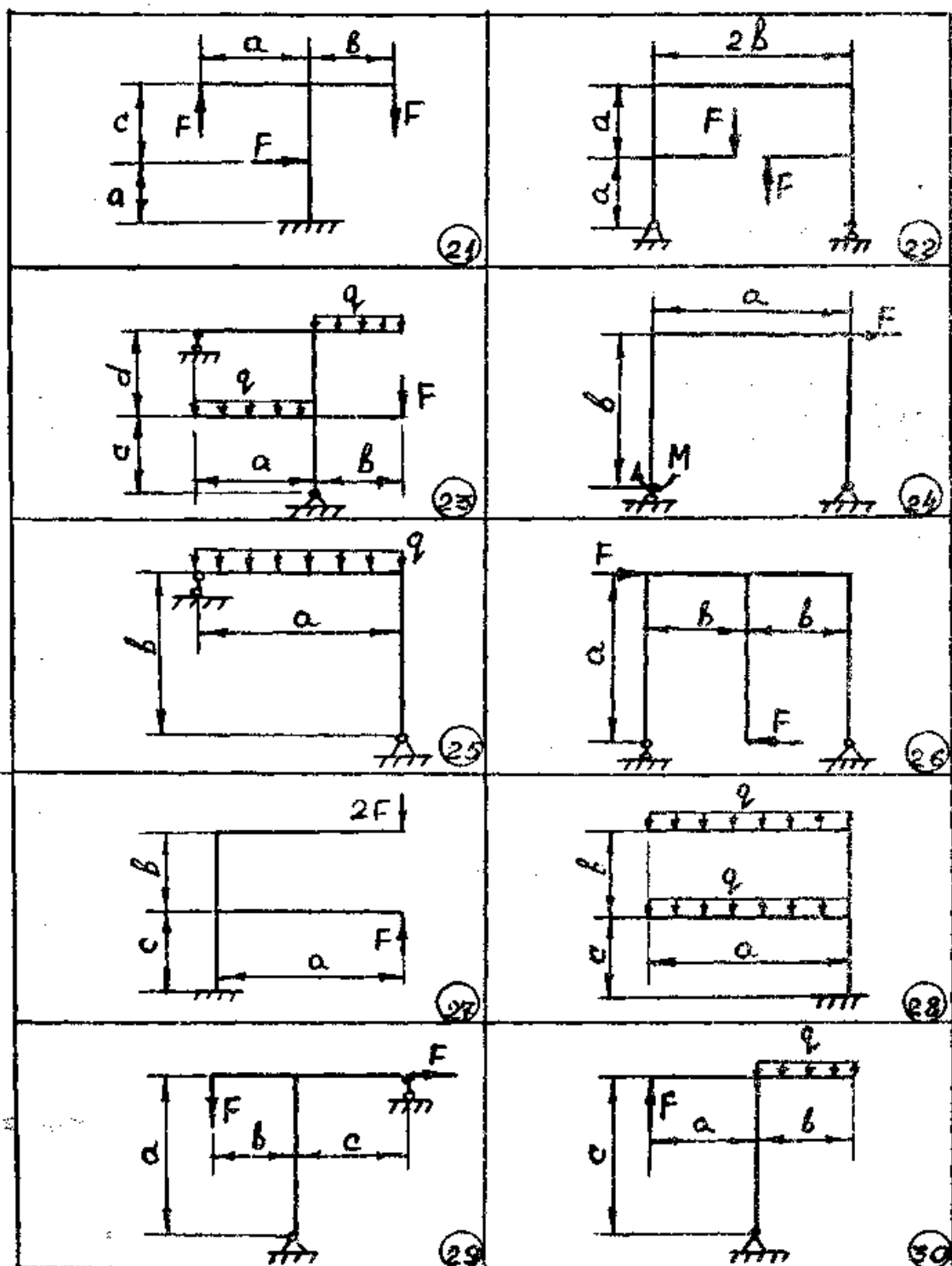
Таблиця 3 – Варіанти схем розрахункових рам



Продовження табл.3



Закінчення табл. 3



**Таблиця 4 - Вихідні дані до завдання № 2**

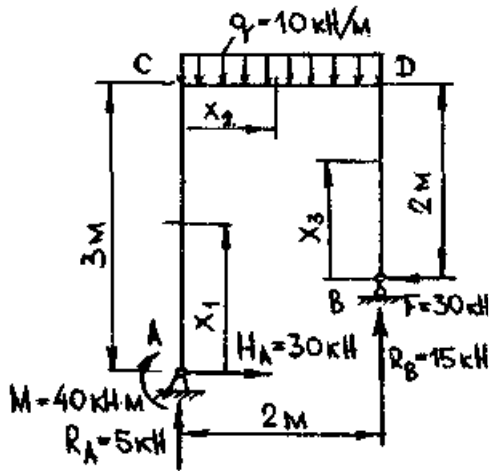
№ п/п	$F, \text{кН}$	$q, \text{кН/м}$	$M, \text{кНм}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$c, \text{м}$	$d, \text{м}$
1	30	10	40	4	1	2	2
2	50	20	30	4	5	2	1
3	40	5	30	3	2	4	1
4	60	15	20	4	2	3	2
5	20	10	30	4	3	2	2
6	30	20	40	5	3	4	3
7	50	10	30	6	4	3	2
8	20	5	25	4	3	2	3
9	10	20	40	4	6	3	2
10	20	30	50	5	2	3	1
11	30	20	30	3	2	2	3
12	40	30	20	3	4	2	3
13	50	10	20	2	4	3	2
14	25	10	40	2	5	1	4
15	60	20	30	4	2	1	3
16	20	10	40	6	2	3	4
17	30	25	20	4	2	3	5
18	50	20	30	2	3	4	4
19	40	15	25	5	3	4	4
20	20	10	40	3	2	4	3
21	30	10	30	2	3	3	1
22	40	20	40	3	2	2	1
23	50	25	40	4	2	3	2
24	60	30	50	4	5	3	1
25	25	20	35	6	5	3	2
26	40	10	30	5	3	2	1
27	30	20	15	4	3	3	1
28	20	30	40	6	4	3	2
29	50	25	30	5	1	3	4
30	30	10	20	2	4	5	1

1.2. Визначити величини опорних реакцій.

1.3. Побудувати епюри внутрішніх зусиль ( $M$ ,  $Q$ ,  $N$ ).

1.4. Перевірити правильність побудови епюр, виходячи з умови статичної рівноваги вузлів рами.

## ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЗАВДАННЯ № 2



1. Визначаємо опорні реакції:

$$\sum F_x = 0, H_A - F = 0, H_A = 30 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0, -M - q \cdot 2 \cdot 1 + F \cdot 1 + R_B \cdot 2 = 0,$$

$$R_B = \frac{1}{2}(M + q \cdot 2 \cdot 1 - F \cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{2}(40 + 10 \cdot 2 \cdot 1 - 30 \cdot 1) = 15 \text{ kN}.$$

$$\sum M_B = 0, -M - R_A \cdot 2 + H_A \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0,$$

$$R_A = \frac{1}{2}(-M + H_A \cdot 1 + q \cdot 2 \cdot 1) =$$

$$= \frac{1}{2}(-40 + 30 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 1) = 5 \text{ kN}.$$

Перевірка:

$$\sum F_y = 0, R_A - q \cdot 2 + R_B = 0,$$

$$5 - 10 \cdot 2 + 15 = 0.$$

4. Розглядаємо переріз 1:

$$0 \leq x_i \leq 3$$

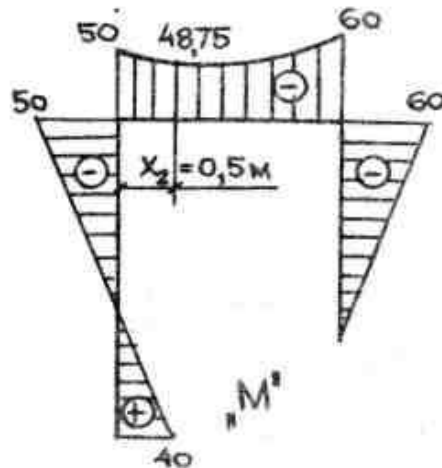
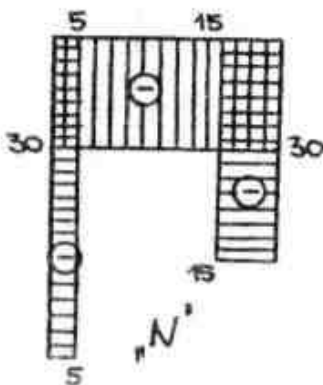
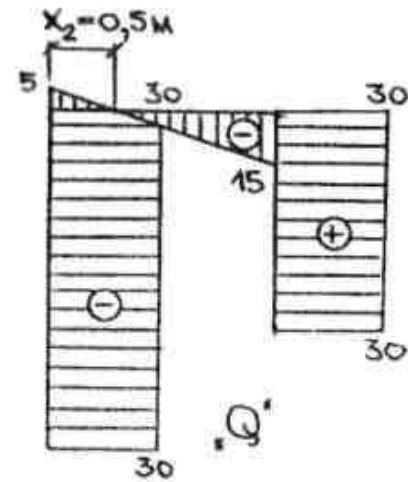
$$Q_{x_i} = -H_A = -30 \text{ kN}.$$

$$N_{x_i} = -R_A = -5 \text{ kN}.$$

$$M_{x_i} = M - H_A \cdot x_i,$$

$$M_{x_i} \big|_{x_i=0} = 40 \text{ kNm},$$

$$M_{x_i} \big|_{x_i=3} = 40 - 30 \cdot 3 = -50 \text{ kNm}.$$



Переріз 2:

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$Q_{x_2} = R_A - q \cdot x_2,$$

$$Q_{x_2} \big|_{x_2=0} = 5 \text{ кН} , Q_{x_2} \big|_{x_2=2} = 5 - 10 \cdot 2 = -15 \text{ кН} ;$$

$$N_{x_2} = -H_A = -30 \text{ кН} .$$

$$M_{x_2} = M - H_A \cdot 3 - \frac{qx_2^2}{2} + R_A \cdot x_2,$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=0} = 40 - 30 \cdot 3 = -50 \text{ кНм} ,$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=2} = 40 - 30 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 2^2}{2} + 5 \cdot 2 = -60 \text{ кНм} .$$

$$\frac{dM_{x_2}}{dx_2} = Q_{x_2} = R_A - qx_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{R_A}{q} = \frac{5}{10} = 0,5 ;$$

$$M_{x_2} \big|_{x_2=0,5} = 40 - 30 \cdot 3 - \frac{10 \cdot 0,5^2}{2} + 5 \cdot 0,5 = -48,75 \text{ кНм}.$$

Переріз 3:

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

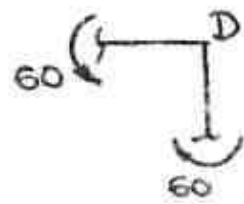
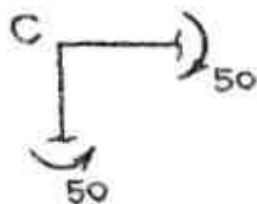
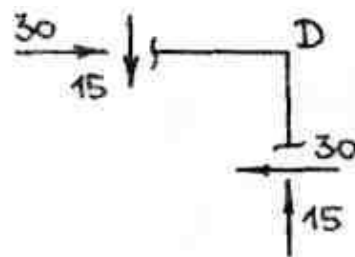
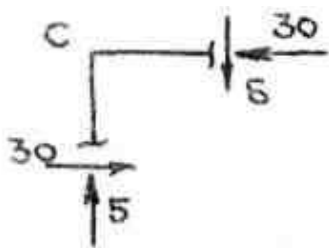
$$Q_{x_3} = F = 30 \text{ кН} .$$

$$N_{x_3} = -R_B = -15 \text{ кН} .$$

$$M_{x_3} = -F \cdot x_3,$$

$$M_{x_3} \big|_{x_3=0} = 0 \text{ кНм} , M_{x_3} \big|_{x_3=2} = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кНм} ;$$

Перевірка: статична рівновага вузлів рами



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. - К.: Вища школа, 1993.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1976.
3. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 1976.
4. Піскунов В.Г., Федоренко Ю.М., Шевченко В.Д. та ін. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності — К.: Вища школа, 1994.

## Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи та виконання розрахунково-графічних і практичних завдань з опору матеріалів „Згин у балках і рамах ” (для студентів 2 курсу усіх форм навчання спеціальності 6.092100-„Промислове і цивільне будівництво ”).

Укладач: Андрієвська Людмила Станіславівна

Відповідальний за випуск В.П. Шпачук

Редактор М.З. Аляб'єв

План 2008\_, поз. 169М\_\_\_\_

Підп. до друку 18.11.2008	Формат 60x84 1/16	Папір офісний
Друк на ризографі	Умовн.- друк. арк. 0,9	Обл.- вид.- арк. 1,2
Тираж 100 прим.	Зам. № _____	

61002, ХНАМГ, Харків, вул. Революції, 12

Сектор оперативної поліграфії при ЦНІТ ХНАМГ